Semaine 1 : Trigonométrie

Exercice 1: Déterminer une formule pour $\tan(x+y)$, en fonction de $\tan(x)$ et $\tan(y)$

Exercice 2: Démontrer les formules $\cos x = \dfrac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$ et $\sin x = \dfrac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}$

Exercice 3: Résoudre les équations : $\sin x + \cos x = 0$ et $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Exercice 4: Démontrer que $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$.

Exercice 5: Linéariser $f_1(x) = \sin^3 x$ et $f_2(x) = \sin x \cos^2 x$.

Exercice 6: Démontrer que $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Exercice 7: Démontrer en utilisant les complexes que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a+b+c) = 4\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a+c}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

Application dans le cas ou a,b,c sont les angles d'un triangle.

Exercice 8: Dans un triangle ABC, on note a,b,c les longueurs des cotés opposés à A, B et C et p le demi périmètre du triangle.

a) Montrer la formule d'Al-Kashi : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$.

- Avec le produit scalaire.
- Avec des arguments de trigonométrie et le théorème de Pythagore.

b) Montrer que aire$(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.

c) En déduire la formule de Héron : aire$(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

d) Montrer que dans un triangle qui n'est pas rectangle on a :

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Semaine 2 : Intégration 1

Exercice 9: Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^{\pi/4} x.\sin 5x \ \mathrm{d}x \qquad I_3 = \int_0^4 \frac{2+\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad I_5 = \int_0^1 \frac{e^{3x}}{1+e^x}\ \mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\ \mathrm{d}x \qquad I_4 = \int_0^{\pi} x^2\cos x\ \mathrm{d}x \qquad I_6 = \int_1^e \frac{\ln x}{x(2+\ln x)}\ \mathrm{d}x$$

Exercice 10: Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ en posant $t = \sin x$.

Exercice 11: Déterminer les primitives suivantes :

$$(I_1) : \int^x t.\cos(2.t^2+1)\,\mathrm{d}t \qquad (I_4) : \int^x e^{2t}\cos(e^t)\,\mathrm{d}t \qquad (I_7) : \int^x \sin t\cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$(I_2) : \int^x \frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t \qquad (I_5) : \int^x \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \qquad (I_8) : \int^x \cos^3 t\,\mathrm{d}t$$

$$(I_3) : \int^x \frac{\arctan\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad (I_6) : \int^x \frac{e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t \qquad (I_9) : \int^x \cos^3 t\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

Exercice 12: Déterminer les limites suivantes :

$$l_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k^2}{n^2}; \qquad l_2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n+k}; \qquad l_3 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2};$$

Semaine 3 : Intégration 2

Exercice 13: Calculer les intégrales ou primitives des fractions rationnelles suivantes :

$(I_1) : \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x$

$(I_2) : \displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

$(I_3) : \displaystyle\int \frac{1}{x^3+3x^2-4}\,\mathrm{d}x$

$(I_4) : \displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(x^2+3x+2)(x+3)}\,\mathrm{d}x$

$(I_5) : \displaystyle\int \frac{8x+4}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

$(I_6) : \displaystyle\int \frac{1}{4x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$

$(I_7) : \displaystyle\int_0^1 \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$

$(I_8) : \displaystyle\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x+1)^2}$

Exercice 14: Calculer I + J, I - J et en déduire les valeurs de I et J :

$$I = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\cos^2 x\;\mathrm{d}x \qquad J = \int_0^{\pi/4} (2x+1)\sin^2 x\;\mathrm{d}x$$

Exercice 15: Calculer les intégrales généralisées suivantes, lorsqu'une bornes est infinie, il suffit de faire tendre la borne vers l'infini pour avoir le résultat, ainsi par définition

$$\int_0^{+\infty} f(x)\;\mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\;\mathrm{d}x$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^{+\infty} \frac{2x-3}{x(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^{\infty} x^2e^{-x}\;\mathrm{d}x \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\sin x\;\mathrm{d}x\ (\lambda>0)$$

Semaine 4 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 16: Soit A et B deux points du plan $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_A,y_A) et (x_B,y_B)

a) Quelles sont les équations des droites passant par A ?

b) Quelle est l'équation de la droite (AB) ?

Exercice 17: Soit A, B, C trois points de l'espace de coordonnées (x_A,y_A,z_A) et (x_B,y_B,z_B) et (x_C,y_C,z_C)

a) Quelles sont les équations des plans passant par A.

b) Quelle est l'équation du plan (ABC) ?

Exercice 18: Étudier les fonctions suivantes et préciser les éventuels extrema :

a) $f : x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ ·

b) $g : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

c) $h : x \mapsto \sin(x)\,(1+\cos(x))$.

d) $k : x \mapsto \ln(1 + e^x) - \frac{x}{2}\cdot$

Exercice 19: Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

a) $(x; y) \mapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$.

b) $(x; y) \mapsto \dfrac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$.

c) $(x; y) \mapsto \ln(xy)$.

d) $(x; y) \mapsto x\ln(y^2 - x)$.

e) $(x; y) \mapsto \sqrt{4x - x^2 + 2y - y^2}$.

Exercice 20:

Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes et déterminer $f_i'(0)$ le cas échéant.

a) Soit f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \begin{cases} x^2\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

b) Soit f_2 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 & \text{si } x > 0, \\ 3\sin x - 2\cos x & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$

c) Soit f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_3(x) = \begin{cases} x\ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Semaine 5 : Dérivées partielles

Exercice 21:
Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$\varphi_1(x,y) = x^2 + 2xy + 2y.$

$\varphi_2(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$

$\varphi_3(x,y) = x^2e^{3y}$

$\varphi_4(x,y) = \sin(2x + 3y)$

$\varphi_5(x,y) = x^y$

$\varphi_6(x,y,z) = xe^{y^2z}$

$\varphi_7(x,y) = \cos\left(\dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)$

$\varphi_8(x,y) = \|(x,y)\|$

Exercice 22: Pour chacune des fonctions suivantes, étudier l'existence des dérivées partielles en (0,0).

a) $\varphi(x,0) = x;\ \varphi(0,y) = 2y$ et sinon $\varphi(x,y) = 0$.

b) $\varphi(x,x) = x;\ \varphi(x,-x) = 2x$ et sinon $\varphi(x,y) = 2x - 3y + xy$.

c) $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

d) $\varphi(x,y) = \dfrac{\sin(x^3 + 5y^3)}{x^2 + y^2}$ pour $(x,y) \neq (0;0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

e) $\varphi(x,y) = \sin(2x) + y$ pour $|y| \leqslant |x|$ et $\varphi(x,y) = e^{3x+5y}$ pour $|y| > |x|$.

Exercice 23: Soit $\varphi(x,y) = \dfrac{xy}{y - x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que les dérivées partielles de φ existent en (0,0).

b) Est-ce que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(1,1)$ existe ? Est-ce que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ existe ?

Exercice 24: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, on pose $\varphi(x,y) = f(x^2 + y^2)$, calculer $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, en fonction de la dérivée de f. Même question pour $\psi(x,y) = f(x)f(\frac{x}{y})$ et $\gamma(x,y) = f(x^2 + f(y)^2)$.

Semaine 6 : Continuité, limites

Exercice 25: Soient les fonctions définies sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $\varphi(x,y) = \frac{\sin x}{x+y}$ et $\psi(x,y) = x^y$.
Comparer $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x;y)\right]$ et $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\varphi(x,y)$.

Exercice 26: Soit $\varphi(x,y) = \frac{xy}{y-x}$ pour $x \neq y$ et $\varphi(x,x) = 0$.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left[\lim\limits_{y\to 0}\varphi(x,y)\right]$, $\lim\limits_{y\to 0}\left[\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x;y)\right]$ et $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,\lambda x)$.
b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x,x+x^2)$.
c) Que peut-on en conclure quant à la limite de φ en (0,0) ?

Exercice 27: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue en (0,0).
b) Calculer les dérivées partielles de φ en (0,0)
c) Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de (0,0).
d) Montrer que les dérivées partielles de φ ne sont pas continues en (0,0).

Exercice 28: Soit $\varphi(x,y) = \frac{x^3 y}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue en 0.
b) Calculer les dérivées partielles de φ en (0,0)
c) Calculer les dérivées partielles de φ en tout point différent de (0,0).
d) Montrer que les dérivées partielles de φ sont continues en (0,0).

Exercice 29:
Trouver toutes les applications $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = x^3 + y.$$

Exercice 30: Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la continuité en (0,0).

a) $\varphi_1(x,0) = x;\ \varphi(0,y) = 2y$ et sinon $\varphi(x,y) = 0$.
b) $\varphi_2(x,0) = x^2;\ \varphi(0,y) = y^2$ et sinon $\varphi(x,y) = \cos(xy)$.
c) $\varphi_3(x,x) = x;\ \varphi(x,-x) = 2x$ et sinon $\varphi(x,y) = 0$.
d) $\varphi_4(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.
e) $\varphi_5(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+5y^3)}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0;0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.
f) $\varphi_6(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0;0)$ et $\varphi(0,0) = 0$.

Exercice 31: Soit $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy$ pour $y < x$ et $\varphi(x,y) = x^2 - y^2$ pour $y \geqslant x$.

a) Montrer que φ est continue.
b) Étudier l'existence des dérivées partielles de φ.
c) Sur quel ouvert maximal les dérivées partielles de φ sont-elle définies ?

Semaine 7 : Différentielle, DL$_1$

Exercice 32: Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa différentielle au point A, ainsi que son DL$_1$ en A.

a) $\varphi_1(x,y) = \ln(x+2y)$, $A = (3,1)$.
b) $\varphi_2(x,y) = x\mathrm{e}^{xy}$, $A = (1,2)$.
c) $\varphi_3(x,y) = \sin(x)\sin(y)$ $A = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice 33:
Les fonctions suivantes sont-elles en (0,0) des $o(\|(x,y)\|)$? des $o(\|(x,y)\|^2)$?

$\varphi_1(x,y) = x$
$\varphi_2(x,y) = xy$
$\varphi_3(x,y) = x^2 + 3y^2$
$\varphi_4(x,y) = \sin(xy)$
$\varphi_5(x,y) = x^2y^2 + x^4 + y^3$
$\varphi_6(x,y,z) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$
$\varphi_7(x,y) = x^2 + y$

Exercice 34: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\varphi(1;3) = 0$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(1;3) = 2$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(1;3) = 1$

a) φ possède-t-elle un extremum local en (1 ; 3) ?
b) Écrire un DL$_1$ de φ en (1 ;3).
c) Donner une valeur approchée de $\varphi(1{,}1; 2{,}9)$
d) On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi(5-4t, 3t^2)$, calculer $f'(1)$.

Semaine 8 : Composée

Exercice 35: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \varphi(\mathrm{e}^t + t, t^2 - 3t)$. Calculer la dérivée de f.

Exercice 36: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et h l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \varphi(x,x)$. Calculer la dérivée de h en fonction des dérivées partielles de φ.

Exercice 37: Soit Φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\Phi(u,v) = (u^2+v^2, uv)$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, déterminer les dérivées partielles de $\psi \circ \Phi$.

Exercice 38: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ fixé, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto g(t) = \varphi(tx,ty)$.

a) Dans cette question et uniquement dans cette question on suppose que $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, déterminer la fonction g, calculer $g'(t)$.
b) Calculer $g'(t)$, en fonction des dérivées partielles de φ.
c) On suppose désormais que $\varphi(tx,ty) = t\varphi(x,y)$ pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$.

   i) Montrer que pour tous $x,y,t \in \mathbb{R}$, on a
   $\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(tx,ty)x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(tx,ty)y$.

ii) En déduire qu'il existe des réels α et β que l'on déterminera tels que, pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi(x,y) = \alpha x + \beta y$.

Exercice 39: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(3;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(3;1) = 7; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(3;1) = -5$$

a) Écrire un DL_1 de φ en (3 ;1).
b) On pose pour tout réel t, $f(t) = \varphi\big(4t-1; 6t-5\big)$, calculer $f'(t)$, puis $f'(1)$.
c) Écrire un DL_1 de f en 1.
d) On pose pour tout réel t, $g(t) = \varphi\big(t^2+2t; t\big)$, calculer $g'(t)$, puis $g'(1)$
e) On pose pour tout réel t, $h(t) = \varphi\big(2t + \varphi(t^3+2; t^2), \varphi(3t; t^5)\big)$, calculer $h'(1)$.

Exercice 40: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(1;1) = -1; \quad \varphi(4;0) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(1;1) = 3; \quad \text{et} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(1;1) = 1; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(4;0) = 5; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(4;0) = 2;$$

a) Soit $f(t) = \varphi(t^2; 2-t)$, calculer $f'(1)$ et $f'(2)$.
b) On pose pour tout réel t, $g(t) = \varphi\Big(\varphi(4;t); \varphi^2\big(1+t^2; (1+t)^2\big)\Big)$, calculer $g'(0)$.
c) On pose pour tout réel t, $h(t) = \varphi(at+b; ct+d)$, comment choisir a,b,c,d pour que le graphe de h ait une tangente horizontale en $(2;1)$.

Semaine 9 : Dérivées partielles secondes

Exercice 41:
Calculer les dérivées partielles à l'ordre 2 des fonctions suivantes :

a) $\varphi_1(x,y) = x^2(x+y)$.
b) $\varphi_2(x,y) = e^{xy}$.

Exercice 42: Écrire le DL_2 de φ_i au voisinage du point M_i.

a) $\varphi_1(x,y) = \sin x \sin y$ et $M_1 = (0;0)$.
b) $\varphi_2(x,y) = x\ln(x^2+y^2)$ et $M_2 = (e^{-1};0)$.
c) $\varphi_3(x,y) = e^{xy}$ et $M_3 = (0;1)$.

Exercice 43: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, telle que
$\varphi(0;1) = 1; \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(0;1) = 2; \quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}(0;1) = 3; \quad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}(0;1) = 5; \quad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2}(0;1) = -5; \quad \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(0;1) = 7$ et
$f(t) = \varphi(t^2, e^{3t})$
Déterminer un DL_2 de f en 0, on pourra commencer par calculer $f'(0)$, $f''(0)$.

Exercice 44: Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$.
On dit que φ est homogène de degré r si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, \varphi(tx,ty) = t^r \varphi(x,y).$$

a) Montrer que la fonction définie par $\psi(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2} + y^2$ est homogène.
b) Montrer que si φ est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.

c) Montrer que si φ est homogène de degré r alors :
$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, x\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x,y)=r\varphi(x,y).$$

d) Montrer que si φ est homogène de degré r et $\mathcal{C}^2$, alors :
$$x^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)+2xy\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x,y)+y^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,y)=r(r-1)\varphi(x,y).$$

Exercice 45: Soit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant

$$\varphi(4;1)=1;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(4;1)=0;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(4;1)=0;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(4;1)=1;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(4;1)=7 \text{ et } \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}(4;1)=4$$

$$\varphi(1;1)=-1;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(1;1)=3;\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(1;1)=1;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(1;1)=4;\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(1;1)=2 \text{ et } \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}(1;1)=1$$

a) Écrire un DL_2 de φ en (4 ;1), écrire la Hessienne de φ en (4 ;1).
b) On pose pour tout réel t, $f(t)=\varphi\big((1+t)^2,t\big)$, calculer $f'(t)$, puis $f''(t)$.
c) Calculer $f'(1)$ et $f''(1)$?
d) Montrer que f possède un minimum local strict en 1.

Exercice 46: Soit φ une application de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Dans cet exercice on n'utilisera pas les matrices hessiennes, on démontrera le résultat sans utiliser de théorème mais en revenant à la définition des extrema locaux.

a) Montrer que si $\varphi(x,y)=x^2-y^2+o(x^2+y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.
b) Montrer que si $\varphi(x,y)=xy+o(x^2+y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.
c) Montrer que si $\varphi(x,y)=x^2+y^2+o(x^2+y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
d) Montrer que si $\varphi(x,y)=x^2+3y^2+o(x^2+y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
e) Montrer que si $\varphi(x,y)=2x^2+2xy+2y^2+o(x^2+y^2)$ alors φ possède un minimum à l'origine.
f) Montrer que si $\varphi(x,y)=x^2+4xy+y^2+o(x^2+y^2)$ alors φ ne possède pas d'extremum à l'origine.

Semaine 10 : Extrema

Exercice 47:
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la matrice hessienne et en déduire la nature du point critique donné :

a) $\varphi_1(x,y,z)=xyz+x^2+y^2+z^2$ au point critique $(0,0,0)$.
b) $\varphi_2(x,y)=x^3+2xy^2-y^4+3xy$ au point critique $(0,0)$.
c) $\varphi_3(x,y)=x^y$ au point critique $(1,0)$.
d) $\varphi_4(x,y)=(x+y)^3-y^2-3(x+y)$ au point critique $(-1{,}0)$.

Exercice 48: Trouver les points critiques des fonctions suivantes et déterminer si ce sont des maxima/minima locaux ou des points selles, (sans utiliser la méthode de Monge) :

$\varphi_1(x,y)=x^2y^2-x^2-y^2$
$\varphi_2(x,y)=4xy-x^4-y^4$
$\varphi_3(x,y)=(x-y)^2+(x+y)^3$
$\varphi_4(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$
$\varphi_5(x,y)=x^3+y^3-3xy$
$\varphi_6(x,y)=x^4+y^4-4(x-y)^2$

Exercice 49: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle qu'il existe $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :
$\varphi(x, y) = g(x) + h(y) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que si g admet un maximum global en x_0 et h admet un maximum global en y_0, alors φ admet un maximum global en (x_0, y_0).
b) Déduire de la question précédente les maxima globaux de $\varphi(x, y) = \sin(x) - y^2 + 2y - 1$.
c) Montrer que si g admet un maximum local en x_0 et h admet un maximum local en y_0, alors φ admet un maximum local en (x_0, y_0).
d) **Bonus** Que dire de φ en un point (x_0, y_0) tel que g admet un maximum local strict en x_0 et h admet un minimum local strict en y_0 ?
e) Que dire dans le cas où $\varphi(x, y) = g(x)h(y)$ avec $g,h > 0$, puis le cas $g > 0,h < 0$

Exercice 50:
Sur le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $2x - 2y + z = 15$, déterminer le point le plus proche de l'origine.

Exercice 51: Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, vérifiant $\varphi(0; 1) = 1$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0; 1) = 0$; $\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0; 1) = 0$; $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}(0,1) = 1$; $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}(0,1) = 3$ et $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial x_2}(0,1) = 2$
a) Écrire la Hessienne de φ en $(0; 1)$, puis un DL_2 de φ en $(0,1)$.
b) φ possède-t-elle un extremum local en $(0; 1)$?

Exercice 52: Parmi tous les triangles de périmètre p quels sont ceux d'aire maximale, on pourra utiliser la formule de Héron (exo8)

Semaine 11 : Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^q$

Exercice 53: Justifier que les applications suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ et écrire leur matrice jacobienne en un point donné.

$\Phi_1(x,y) = (x + y, x - y)$
$\Phi_2(x,y) = \left(\sin(x^2 - y^2); \dfrac{y}{x}\right)$
$\Phi_3(x,y,z) = (xy^2, x^2 e^{y+z}, \sin x)$
$\Phi_4(x,y,z) = (x + y^2, xyz^2)$
$\Phi_5(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{2}(x^2 - z^2), \sin(x)\sin(\dfrac{z}{x})\right)$

Exercice 54:
On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x, y) = \left(\sin(xy), \cos x, e^{y^2}\right) \text{ et } g(u, v, w) = uvw.$$

a) Calculer explicitement $g \circ f$.
b) En utilisant la question a), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.
c) Déterminer les matrices jacobiennes $J_f(x, y)$ et $J_g(u, v, w)$ de f et de g.
d) Retrouver le résultat de b) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 55:
Soient $F(t) = (t^2, e^{2t})$, $\Phi(x,y) = (xy, \frac{x}{y})$, $\varphi(x,y) = x^2 + 3y$, dériver la fonction $h = \varphi \circ \Phi \circ F$.

Exercice 56: Une fonction de plusieurs variables $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est convexe si elle vérifie

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^p, \forall t \in [0; 1],\ \varphi\big(tx + (1 - t)y\big) \leqslant t\varphi(x) + (1 - t)\varphi(y)$$

Montrer qu'une fonction convexe qui possède un point critique en a possède un minimum en a. On pourra supposer qu'il existe b tel que $\varphi(a) > \varphi(b)$ puis montrer que $\varphi(a+t(b-a)) - \varphi(a) \leqslant t\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big)$.